CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

Problema 1.

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

a) Rezolvați ecuația $\det(I_3+xA)=0$, în necunoscuta $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $A^2=A+2I_3$.

c) Demonstrați că matricea $B=2A+I_3$ este inversabilă și are inversă matricea $C=\frac{2}{5}A-\frac{3}{5}I_3$.

d) Matricea $B=2A+I_3$ o transformăm în 2017 pași, în felul următor: la fiecare pas, în mod aleator, elementele de pe diagonala principală se măresc toate deodată sau se micșorează toate deodată cu 1 iar toate celelalte elemente se măresc toate deodată sau se micșorează toate deodată cu 3. Aflați dacă este posibil ca după parcurgerea celor 2017 pași matricea B să se transforme într-o matrice cu determinantul egal cu 2017.

Problema 2.

Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}6&11\\0&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\{X\in M_2(\mathbb{R})/\,A\cdot X=X\cdot A\}$.

a) Demonstrați că $B\in G$.

b) Dacă $X\in G$, demonstrați că există $x,\ y\in\mathbb{R}$ și X este de forma $\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}$.

c) Matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ verifică egalitatea $X^3-X=A$. Demonstrați că $X\in G$ și determinați toate matricele X cu această proprietate.

Problema 3.

a) Fie $a,\ b,\ c$ numere reale strict pozitive și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+\sqrt{bx^2+cx+1}$.

Determinați $a,\ b,\ c$ știind că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=4$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{4}$.

b) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\sqrt{4x^2+x+1}$.

Problema 4.

Funcția $f:[0;12]\to\mathbb{R}$, $f(t)=\begin{cases}\dfrac{3t^2-10t+a}{t^2-2t-3}, & t\in[0;\,3)\\ b-\log_2(t-2), & t\in[3;\,12]\end{cases}$, determină temperatura unui corp, măsurată pe timp de 12 ore.

a) Știind că la momentul $t=1$ temperatura corpului este de 1^0 iar la momentul $t=2$ este de 2^0, aflați temperatura corpului la momentul $t=10$.

b) Determinați $a,\ b\in\mathbb{R}$ în cazul în care f are limită în $t=3$.

c) În cazul $a=3$ și $b=2$ arătați că f este continuă pe $[0;12]$ și determinați intervalele pe care $f(t)>0$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*